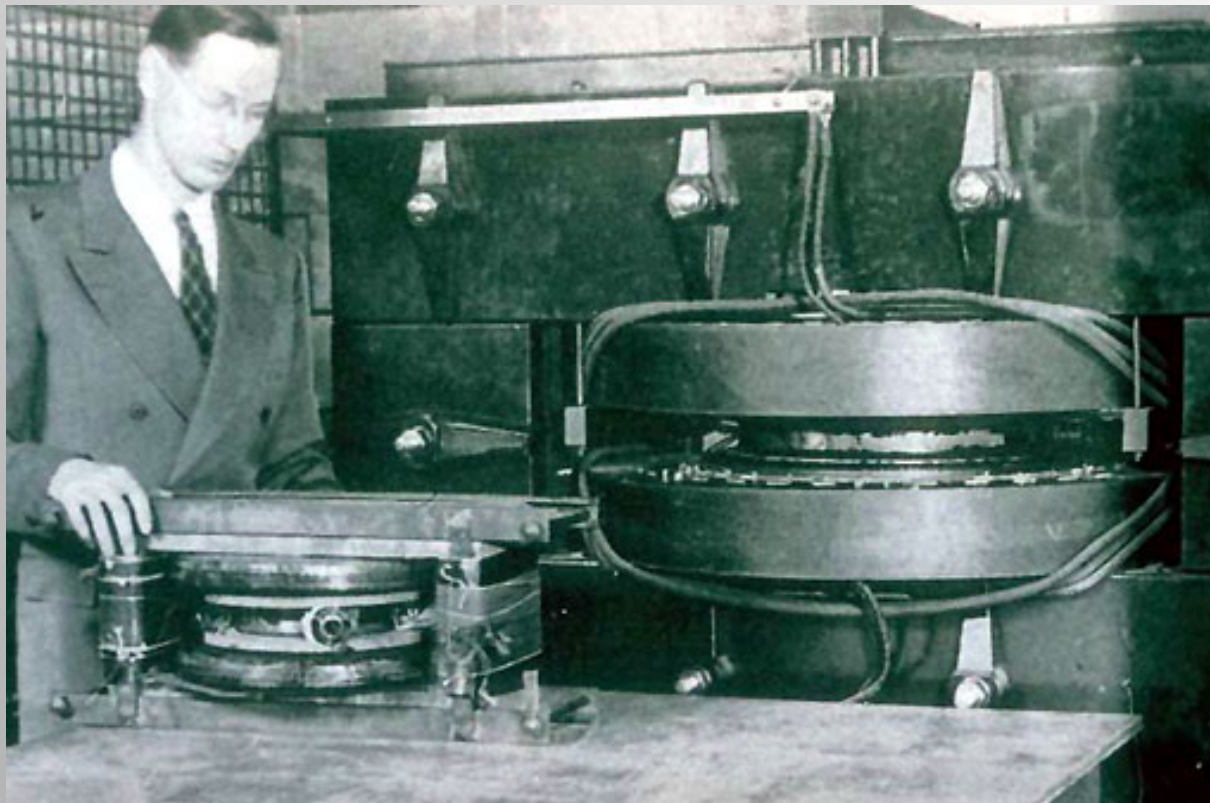
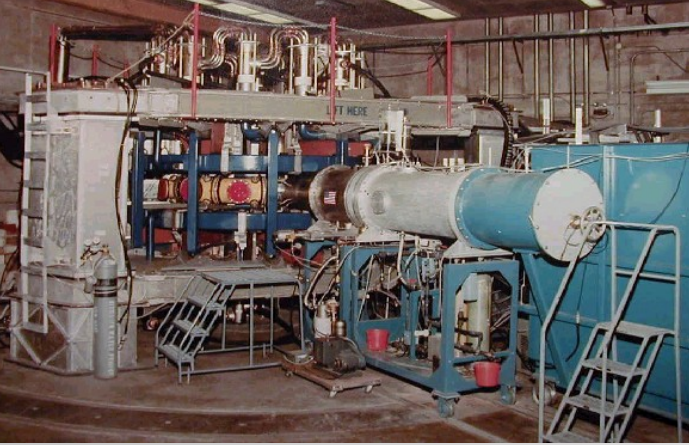




Kapitel 07

Betatron – Betatronfokussierung Schwache Fokussierung

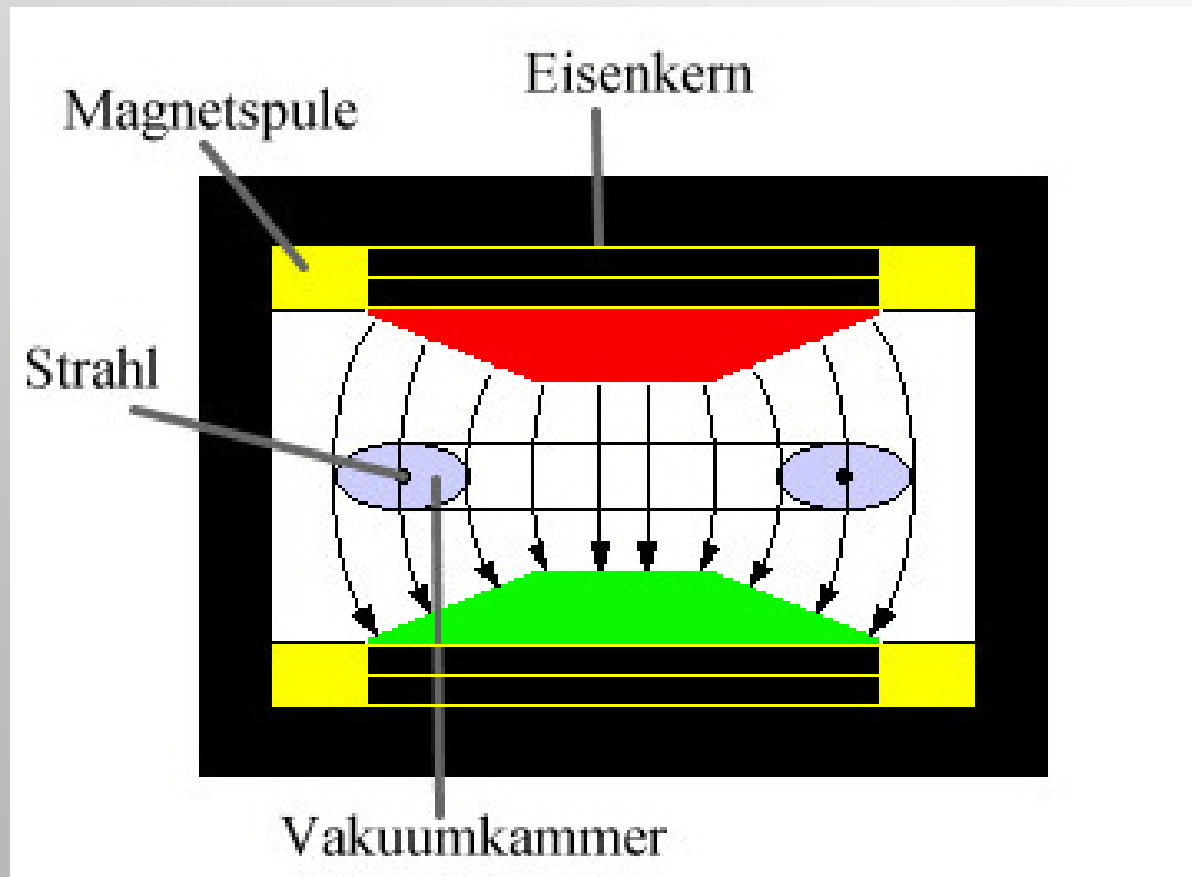




Einsatz

- Betatrons spielen heute weder in der Medizin noch in der Hochenergiephysik eine bedeutende Rolle
- → Ablöse durch LINAC, wegen:
 - besseren Strahleigenschaften
 - höhere therapeutische Dosisleistungen
 - → historische Bedeutung (Medizin)

7.1 Prinzip des Betatrons





Prinzip

- ein zeitlich veränderliches Magnetfeld ist von einem elektrischen Wirbelfeld umgeben ist (Faradaysches Induktionsgesetz)
- Damit kann man das Magnetfeld, das bei einem Kreisbeschleuniger zur Ablenkung der Teilchen notwendig ist, gleichzeitig zur Beschleunigung der Teilchen nutzen
- → sehr kompakter und sehr einfacher Kreisbeschleuniger
- → Beschleunigung von Elektronen

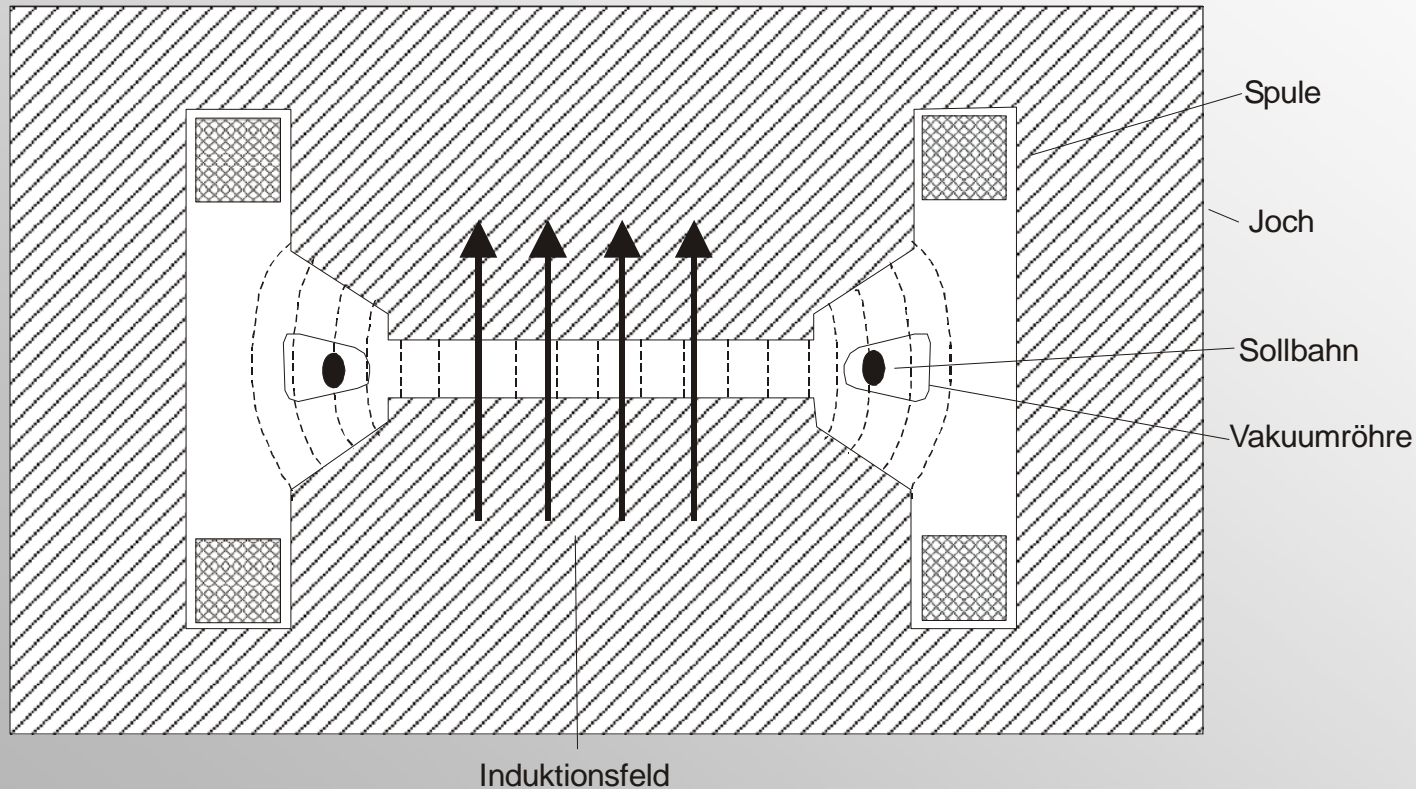


Magnet des Betatrons

- Der Magnet hat die Form eines „H“
- Zur Vermeidung von Wirbelstromeffekten wird der Magnet (wie beim Transformator) aus lamellierten Eisen aufgebaut.
- Der zentrale Bereich des Magneten, d.h. die Polschuhe und die Erregerspulen, sind rotationssymmetrisch zur Magnetachse angeordnet.
- e^- in einer ringförmigen Vakuumkammer von dem magnetischen Führungsfeld („guiding field“) auf einer Kreisbahn
- Wechselspannung Frequenz von 50 Hz, entspricht der Frequenz des technischen Wechselstroms



Schematische Darstellung des Betatrons



Das zeitlich veränderliche Magnetfeld erzeugt in Richtung des umlaufenden Elektronenstrahls ein elektrisches Feld. Dieses elektrische Feld beschleunigt die Elektronen.



Funktion eines Betatrons

- Um den Strahl auf einer Kreisbahn zu halten, muss das **Magnetfeld einen bestimmten radialen Verlauf** haben. Dieser Verlauf wird durch **besondere Formgebung der Pole** erreicht und bewirkt eine **Strahlfokussierung** um die ideale Bahn.
- In diesem fokussierenden Feld **führen die Teilchen senkrecht zur Bahn Schwingungen** aus, die man als **Betatronschwingungen** bezeichnet.
- Nach Erreichen der Endenergie werden die Elektronen durch elektrische oder magnetische Felder aus dem Betatron gelenkt.

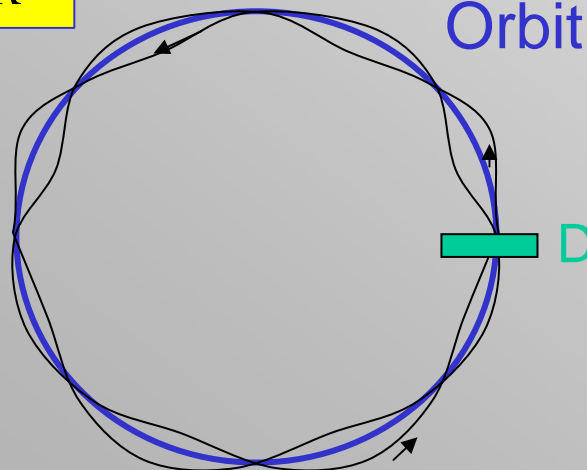


Betatronschwingung

n... Feldindex

- Eine grundlegende Eigenschaft aller Kreisbeschleuniger sind die Schwingungen um die Soll-Lage, die sogenannte **Betatronschwingung**. Beim Betatron ist sie für $0 < n < 1$ vorhanden, wobei gilt:

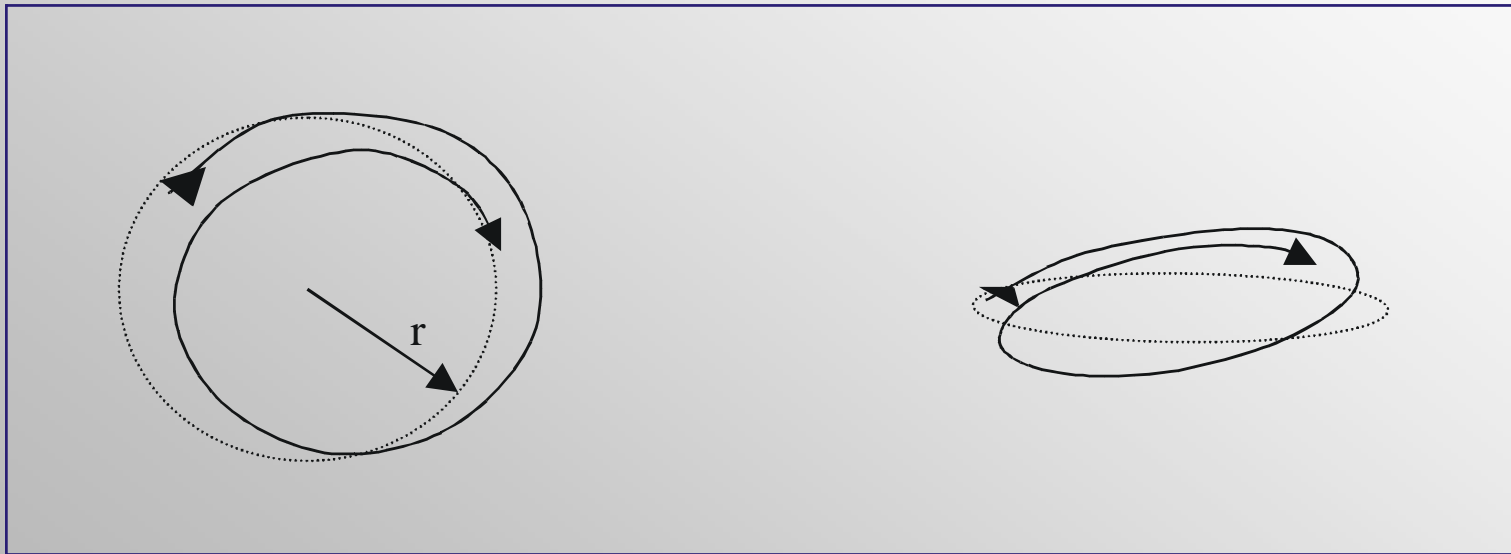
$$B(r) \propto R^{-n}$$



$$\omega_{\text{Betatron}} < \omega_{\text{Umlauffrequenz}}$$



Betatronschwingung um eine kreissymmetrische Sollbahn (gepunktet) in einem schwach fokussierenden Beschleuniger



Radiale und vertikale Schwingung



1/2-Bedingung und Bahnstabilität

- Wideröe 1928:

$$B(R_s, t) = \frac{1}{2} \bar{B}(R_s, t) + C$$

- B ...Induktion am Teilchensollkreis
- \bar{B} ...mittlere Induktion innerhalb des Sollkreises
- → Bahnstabilität



Bahnstabilität (Walton, Steenbeck)

- Die Bedingungen für **radiale und axiale Bahnstabilität** in einem Kreisbeschleuniger wurden zum ersten Mal im Zusammenhang mit der Entwicklung des Betatrons voll erkannt.
- Daher werden für alle Kreisbeschleuniger die entsprechenden **transversalen Schwingungen Betatronschwingungen** genannt.



Axiale Fokussierung

- Für die axiale Fokussierung benötigt man ein Magnetfeld, das nach außen zu größeren Radien hin abfällt. Der Feldindex n ist der entscheidende Parameter für die Berechnung der radialen und axialen Fokussierungskräfte:

- **Definition:**

$$n = -\frac{R}{B_z} \frac{dB_z}{dR}$$

- umgeformt ergibt sich:

$$\frac{dB_z}{B_z} = -n \frac{dR}{R}$$

- \rightarrow Integration:

$$\frac{B_z}{B_{z,R_s}} = \left(\frac{R}{R_s} \right)^{-n}$$



Elektronen auf dem Sollkreis

- Die Elektronen gelten auf dem Sollkreis nur dann als stabil, wenn bei **kleinen Auslenkungen Kräfte** auftreten, die sie auf den Sollkreis zurücktreiben.
- **Damit solche rücktreibenden Kräfte vorhanden sind, muss das Führungsfeld in der Umgebung des Sollkreises mit wachsendem Radius abnehmen, aber langsamer als mit $1/R$.**
- Die Formulierung von Steenbeck lautet:

$$0 > \frac{R}{B} \frac{\partial B}{\partial R} > -1$$



Radiale Stabilität

$$F_{\text{Zentripetal}}(R + \Delta R) = \frac{mv^2}{R + \Delta R} \approx \frac{mv^2}{R} \left(1 - \frac{\Delta R}{R}\right)$$

$$F_{\text{radial,Lorentz}}(R + \Delta R) = evB_z(R + \Delta R) = ev(B_z + \Delta B_z) = ev\left(B_z - nB_z \frac{\Delta R}{R}\right)$$

$$F_{\text{radial}}(R + \Delta R) = \frac{mv^2}{R} \left(1 - \frac{\Delta R}{R}\right) - ev\left(B - nB \frac{\Delta R}{R}\right)$$

$$F_0 = \frac{mv^2}{R} = evB(R)$$

$$F_r(R + \Delta R) = \frac{mv^2}{R} \left(1 - \frac{\Delta R}{R}\right) - \frac{mv^2}{R} \left(1 - n \frac{\Delta R}{R}\right) = -\frac{mv^2}{R} \frac{\Delta R}{R} (1 - n)$$

$$F_r = -F_0 \frac{\Delta R}{R} (1 - n)$$



Vertikale Stabilität

$$\text{rot}B = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial B_r}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial r} \Leftrightarrow \Delta B_r = \frac{\Delta B_z}{\Delta r} \Delta z$$

$$B_r(z = 0) = 0$$

$$F_{\text{vertikal}}(z) = evB_r(z) = -ev\left(n \frac{B_z}{R} \Delta z\right) = -evB_z\left(n \frac{\Delta z}{R}\right)$$

$$F_r = -F_0 n \frac{\Delta z}{R}$$



Gesamtkraft

- Die rücktreibenden Kräfte sind gegeben durch:

$$F_{radial} = -F_0 \frac{(1-n)}{R_s} \Delta R$$
$$F_{vertikal} = -F_0 \frac{n}{R_s} \Delta z$$

- D. h. die radial rücktreibende Kraft ist für positive ΔR vorhanden und nach innen gerichtet wenn der Feldindex $n < 1$ ist und die vertikal rücktreibende Kraft ist vorhanden, wenn $n > 0$ ist.
- Die Forderung nach Bahnstabilität sowohl in radialer wie auch in vertikaler Richtung bedeutet somit für den Feldindex n : $0 < n < 1$.

Betatronschwingungen

- Beim **Betatron** liegt der Feldindex n meistens im Bereich $0,5 < n < 0,75$.
- Da F_v und F_r proportional zu z und R sind, handelt es sich um sinusförmige Schwingungen:

$$F_{radial} = m\Delta\ddot{R} = -F_0 \frac{(1-n)}{R_s} \Delta R$$

$$F_{vertikal} = m\ddot{z} = -F_0 \frac{n}{R_s} z$$

mit $F_0 = m \frac{v^2}{R_s}$ und $\omega_s = \frac{v}{R_s}$

$$\Delta\ddot{R} + \omega_s^2 (1-n) \Delta R = 0$$

$$\ddot{z} + n\omega_s^2 z = 0$$

**Harmonische Schwingung
weniger als 1 pro Umlauf!**



7.1.1 Injektion und Extraktion

- Zur Injektion (= Einschussvorgang) wird eine exzentrisch zur Sollbahn angeordnete Elektronenkanone verwendet
- Wolfram-Glühkathode emittiert und mit einer Gleichspannung aus z.B. 50 keV beschleunigt
- Elektronenkanone gepulst (50 Hz so wie Betatron)
- Während der Injektionsphase wird die $\frac{1}{2}$ -Bedingung durch Zusatzspulen so gestört, dass die Sollbahn zunächst in der Nähe der Elektronenkanone liegt und während der Injektion kontinuierlich zum Sollradius hinverlagert wird.



Transversales Stapeln

- Viele Umlaufbahnen dicht nebeneinander gelegt werden („**transversal stacking**“)
- es wird verhindert, dass die Elektronen nach einem Umlauf wieder auf die Elektronenkanone prallen
- Die **Bahnseparation** wird durch die radiale **Betatronschwingung** günstig beeinflusst
- Wenn sich das **Magnetfeld** seinem **Maximum** nähert, kann **der umlaufende Elektronenstrahl** wiederum durch **Störung der $\frac{1}{2}$ -Bedingung** aus dem **Betatron** **ausgelenkt** oder auf ein **internes Target**, die **sogenannte Antikathode**, **gerichtet** werden



Oct. 11, 1927.

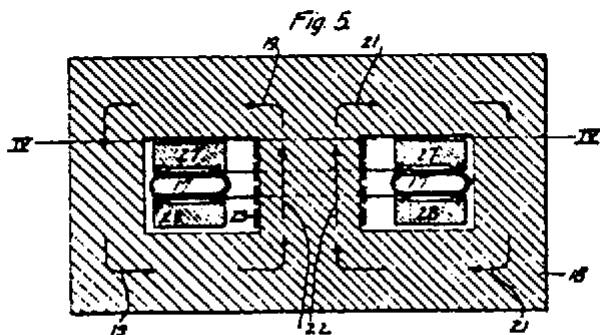
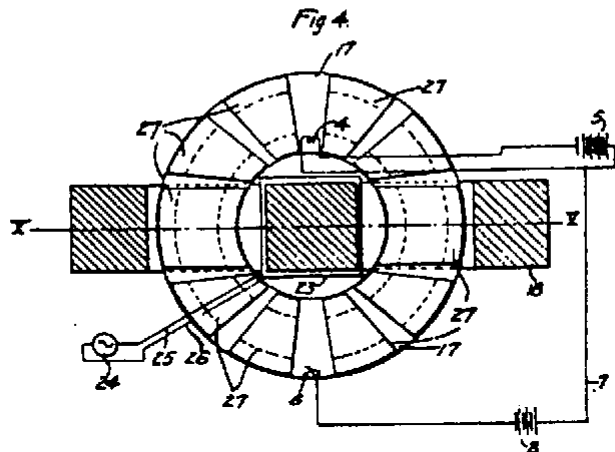
J. SLEPIAN

1,645,304

X-RAY TUBE

Filed April 1, 1922

2 Sheets-Sheet 2



WITNESSES
Alfred H. ...
H. S. ...

INVENTOR
Joseph Slepian
BY
Wesley ...
ATTORNEY

Diagram from
Slepian's
betatron
patent