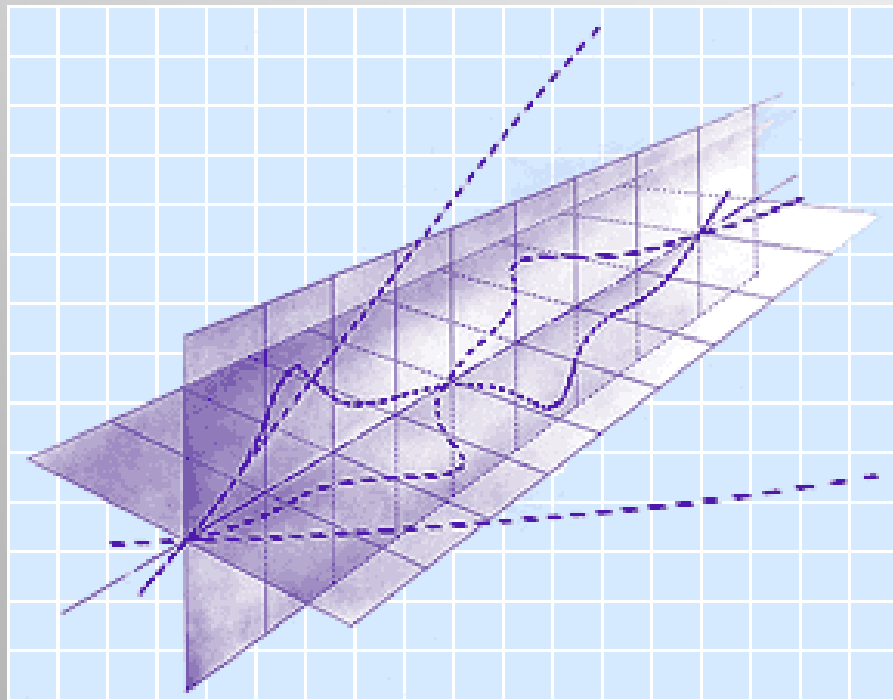


Kapitel 11

Prinzip der Fokussierung durch wechselnde Feldgradienten Alternating Gradient (= AGS) – Starke Fokussierung





Ernest D. Courant, Milton Stanley Livingston and Hartland S. Snyder (1952 theory)

Department of Energy; Brookhaven National Laboratory

- The strong-focusing principle revolutionized accelerator design
- Practical demonstration in 1954, when Cornell's 1.3 GeV electron accelerator began operation
- larger machines → 1959, the 25 GeV Proton Synchrotron went into operation at CERN
- in 1960, the 33 GeV AGS (BNL)
- using only twice the amount of steel (4,000 tons) needed to construct the weak-focusing, 3.3 GeV Cosmotron
- strong focusing has been one of the guiding principles behind every new accelerator in the world



- Bis jetzt: radiale und vertikale Fokussierung war immer Kompromiss zwischen zwei gegensätzlichen Bedingungen
 - Feld soll stark mit dem Radius abnehmen → gute vertikale Fokussierung
 - radiale Fokussierung benötigt aber ein Feld, welches entweder mit dem Radius zunimmt oder nicht stärker als mit $1/r$ abnimmt.

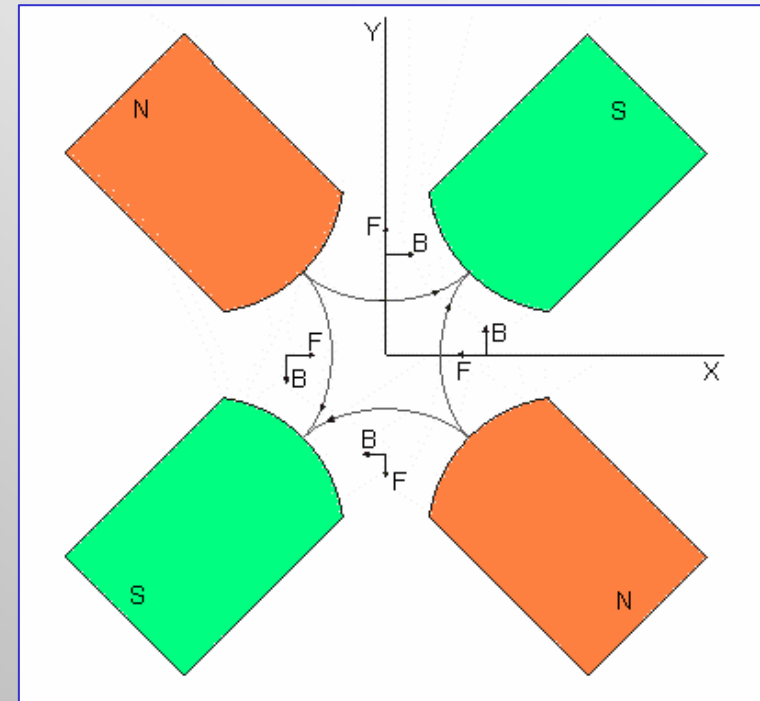


Feldindex

- vertikale als auch radiale Schwingungen sind an den Feldindex n gebunden ($0 < n < 1$).
 - Wenn $n > 1$: keine radiale Fokussierung
 - Wenn $n < 0$: keine vertikale Fokussierung
- 1949 baute Christophilos eine Maschine, die auf einer anderen Bedingung, als $0 < n < 1$, beruhte.
- → zirkularer Beschleuniger, in dem das Feld abwechselnd zu- und abnimmt

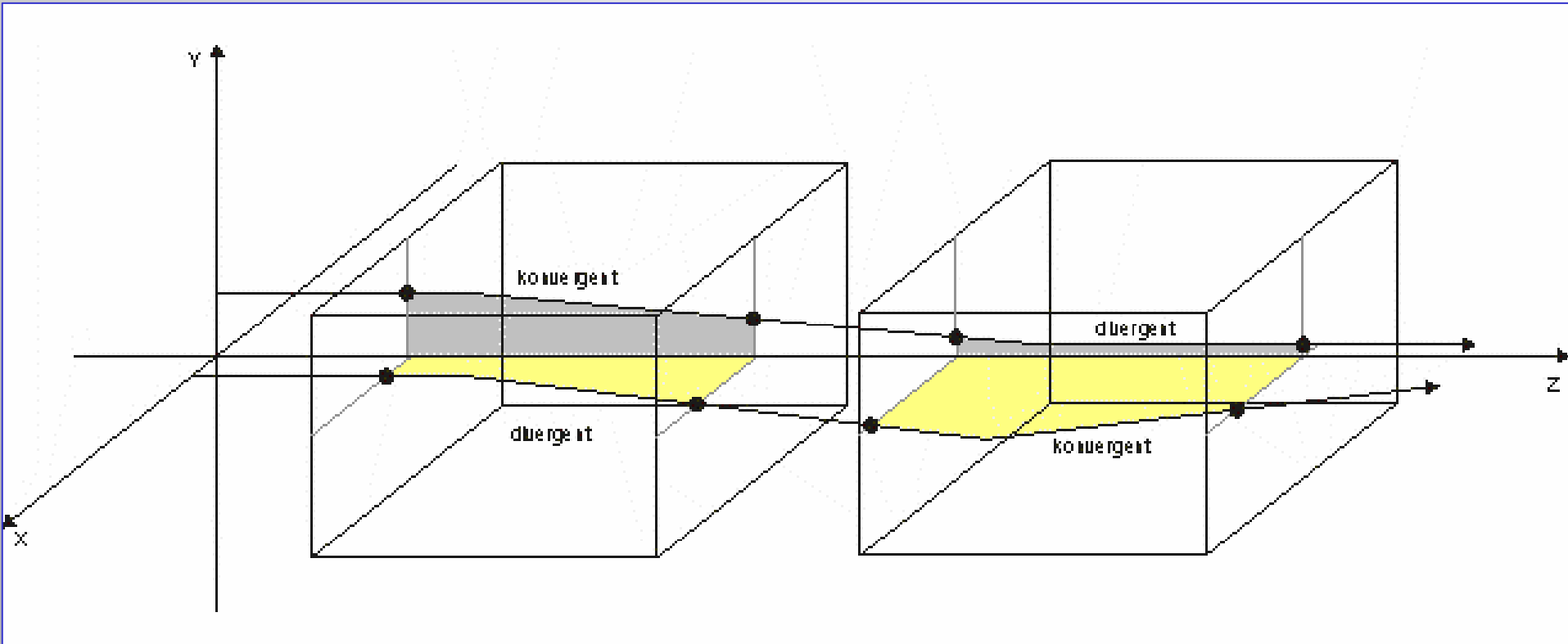
11.1 Quadrupol-Linsen

- Hauptbestandteil: Quadrupolmagnete
- Anwendung: heute in jedem LINAC und Synchrotron
- Abwechselnd Fokussieren - Defokussieren → Fokussierung mit sehr geringen Strahlverlusten
- Feldverlauf Quadrupollinse





Teilchenbahn durch eine Quadrupollinse





- Magnetpol hat hyperbolische Kontur
- Magnetfeldkomponenten werden beschrieben durch:

$$B_x = ky$$

$$B_y = kx$$

- Mit Quadrupolfeldgradienten k
- Teilchenbewegung entlang der z-Achse
- Lorentzkraft, die in einem Punkt (x,y) wirkt, hat die folgenden Komponenten:

$$F_x = -qvB_y = -qvkx$$

$$F_y = qvB_x = qvky$$

- Bewegungsgleichungen:

$$m\ddot{x} = -qvkx$$

$$m\ddot{y} = qvky$$



- Bewegungsgleichung → 2. Ableitung nach der Zeit
 - Beschreibung der Teilchenbewegung als Funktion der Zeit
 - Man benötigt aber Beschreibung als Funktion der Position z.B. bei Injektionselementen,...

- Substitution

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = v \cdot \frac{dx}{dz} = v \cdot x'$$

- Wobei v die Teilchengeschwindigkeit ist und
- x' und y' die Winkel zwischen Sollbahn und horizontaler/vertikaler Teilchenbahn sind

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

$$y'' - \omega^2 y = 0$$

$$\omega = \frac{qk}{mv}$$

- Beschreibung der transversalen Teilchenbewegung als Funktion des Orts im Beschleuniger: $\omega = \omega(z)$.
- Longitudinale Geschwindigkeit = konstant.



- Wenn $k < 0$, dann ändert sich die Gleichung für x in die für y und umgekehrt. Bestimmt durch Verteilung der Quadrupolmagneten im Beschleuniger.
- Lösungen sind Linearkombinationen von
 - Sinus und Kosinus in der ersten Gleichung und
 - Sinushyperbolicus und Kosinushyperbolicus in der zweiten Gleichung

$$\begin{aligned}x &= x_0 \cos(\omega z) + x'_0 \omega^{-1} \sin(\omega z) \\x' &= -x_0 \omega \sin(\omega z) + x'_0 \cos(\omega z)\end{aligned}$$

- in der fokussierenden Ebene und

$$\begin{aligned}y &= y_0 \cosh \omega z + y'_0 \omega^{-1} \sinh \omega z \\y' &= y_0 \omega \sinh \omega z + y'_0 \cosh \omega z\end{aligned}$$

- in der defokussierenden Ebene.



- Die Gleichungen

$$\begin{aligned}x &= x_0 \cos(\omega z) + x'_0 \omega^{-1} \sin(\omega z) \\x' &= -x_0 \omega \sin(\omega z) + x'_0 \cos(\omega z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= y_0 \cosh \omega z + y'_0 \omega^{-1} \sinh \omega z \\y' &= y_0 \sinh \omega z + y'_0 \cosh \omega z\end{aligned}$$

- sind äquivalent zu den folgenden **2x2 Matrizen-Gleichungen**

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega z) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega z) \\ -\omega \sin(\omega z) & \cos(\omega z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\omega z) & \frac{1}{\omega} \sinh(\omega z) \\ \omega \sinh(\omega z) & \cosh(\omega z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

- Beschreibung der Teilchenbewegung im Quadrupol**



- und die Matrix $O = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gehört zur Lösung von $x'' = 0$ und beschreibt Bewegung in feldfreien Sektionen:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + Lx'_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$$

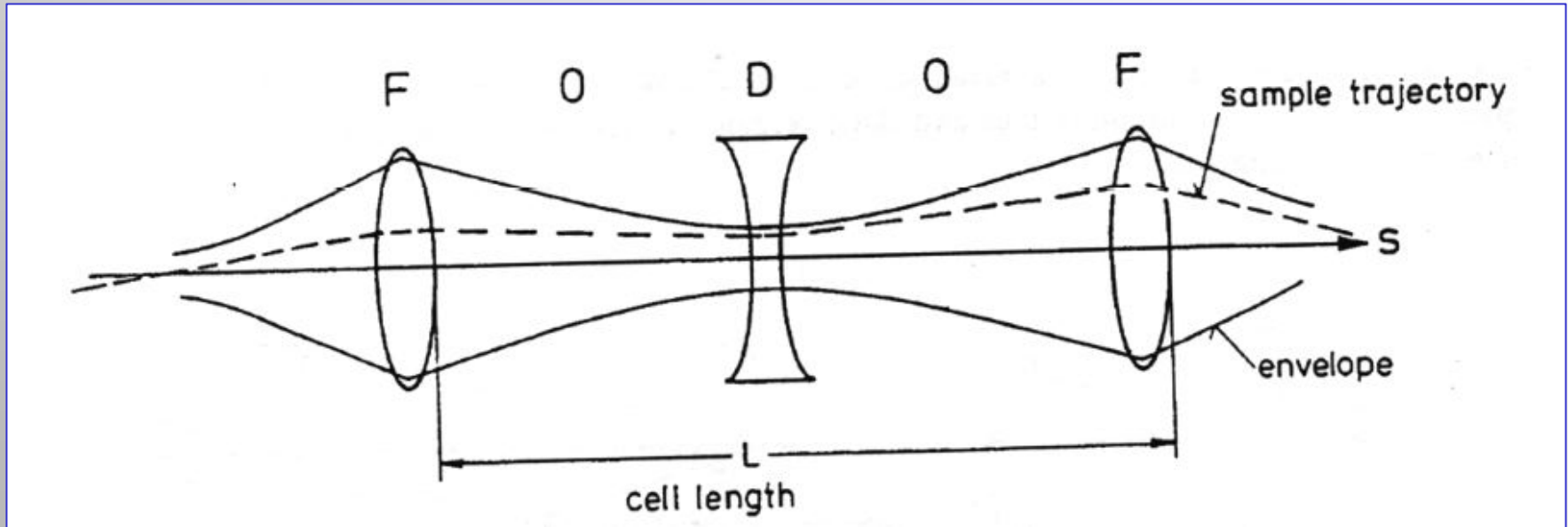
- Eine stark fokussierende Linse aus zwei Quadrupolen der Länge L getrennt durch eine Distanz s hat die Matrix

$$M = DOF = \begin{pmatrix} \cosh(\omega L) & \frac{1}{\omega} \sinh(\omega L) \\ \omega \sinh(\omega L) & \cosh(\omega L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega L) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega L) \\ -\omega \sin(\omega L) & \cos(\omega L) \end{pmatrix}$$

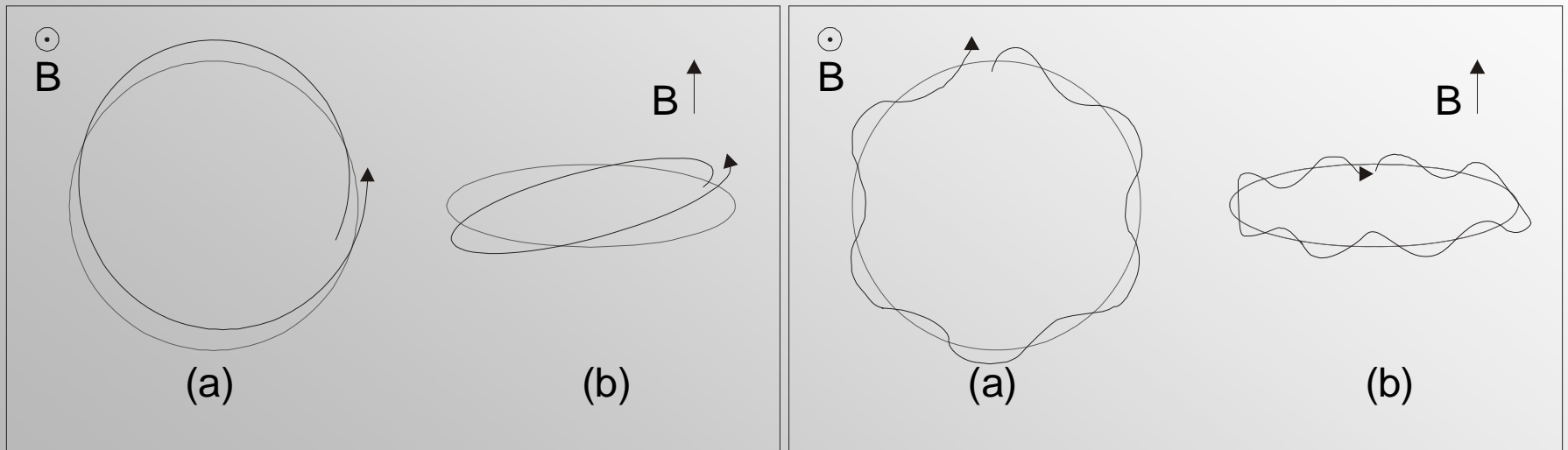
für Bewegungen in einer Ebene (z.B: in der x-z-Ebene) und genau umgekehrt $N = FOD$ in der anderen Ebene

- F = fokussierend, D = defokussierend, O = außerhalb der Magnete

Linsenäquivalent



11.2 Betatron-Schwingungen in stark fokussierenden Maschinen



Vergleich: **Betatronschwingungen** in einem **schwach fokussierenden** (links) und in einem **stark fokussierenden** (rechts) Beschleuniger



Betatron-Schwingungen in stark fokussierenden Maschinen

- Betatron-Schwingungen können mittels Matrizenformalismus beschrieben werden.
- In jeder Magnetsektion ist weiterhin die allgemeine Gleichung $\ddot{\rho} + \omega_0^2(1-n)\rho = 0$ für kleine radiale Schwingungen gültig.
- Es ist nützlich eine Variable s als Länge entlang der Umlaufbahn anzugeben.
- $ds = vdt = \omega_0 r_0 dt$ und die transformierte Gleichung

ergibt

$$\frac{d^2 \rho}{ds^2} + (1-n) \frac{\rho}{r_0^2} = \frac{d^2 \rho}{ds^2} + \left(\frac{1}{n} - 1\right) \frac{n}{r_0^2} \rho = 0$$



- Aus der Definition

$$n = -\frac{r}{B_z} \frac{dB_z}{dr} = -\frac{d \ln B_z}{d \ln r}$$

- erhält man für den Feldindex :

$$\frac{n}{r_0^2} = -\frac{1}{B_0 r_0} \frac{dB}{dr} = -\frac{q}{p} \frac{dB}{dr} = \frac{q}{p} k_{quad} = -\omega^2$$

- wobei ω^2 jene Größe ist, die die Quadrupol-Linsen charakterisiert

- Man erhält schließlich

$$\frac{d^2 \rho}{ds^2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \omega^2 \rho = 0$$

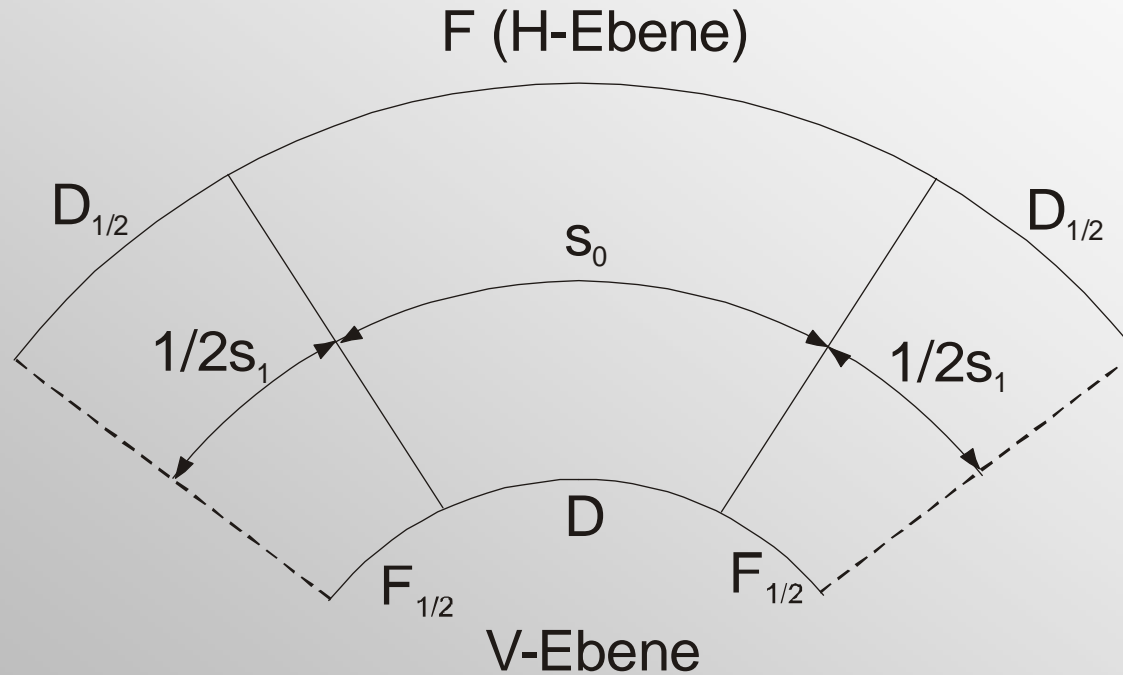
- In stark fokussierenden Maschinen ist der Feldindex n sehr hoch und kann Werte von 200 oder mehr annehmen.



- Da der Feldgradient und deshalb ω^2 alternierend in unterschiedlichen Sektoren ist, ergibt sich schlussendlich $\frac{d^2 \rho}{ds^2} \pm \omega^2 \rho = 0$
- wobei das positive Vorzeichen dem fokussierenden Sektor und das negative Vorzeichen dem defokussierenden Sektor zuzuordnen ist.



Einfache symmetrische Grundzelle eines „alternating gradient“ Synchrotrons



- Gesamte Maschine aus mehreren Zellen aufgebaut
- F und D Quadrupole haben gleichen Gradienten.



- Die Matrix der Grundzelle ist das Produkt
- $H = D_{1/2} \cdot F \cdot D_{1/2} =$

$$\begin{pmatrix} \cosh(\omega \frac{s_1}{2}) & \frac{1}{\omega} \sinh(\omega \frac{s_1}{2}) \\ \omega \sinh(\omega \frac{s_1}{2}) & \cosh(\omega \frac{s_1}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega s_0) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega s_0) \\ -\omega \sin(\omega s_0) & \cos(\omega s_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(\omega \frac{s_1}{2}) & \frac{1}{\omega} \sinh(\omega \frac{s_1}{2}) \\ \omega \sinh(\omega \frac{s_1}{2}) & \cosh(\omega \frac{s_1}{2}) \end{pmatrix}$$

- Gleichung für die horizontale Ebene



- für die vertikale Ebene
- $\mathbf{V} = \mathbf{F}_{1/2} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}_{1/2} =$

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega \frac{s_1}{2}) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega \frac{s_1}{2}) \\ -\omega \sin(\omega \frac{s_1}{2}) & \cos(\omega \frac{s_1}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(\omega s_0) & \frac{1}{\omega} \sinh(\omega s_0) \\ \omega \sinh(\omega s_0) & \cosh(\omega s_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega \frac{s_1}{2}) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega \frac{s_1}{2}) \\ -\omega \sin(\omega \frac{s_1}{2}) & \cos(\omega \frac{s_1}{2}) \end{pmatrix}$$



Stabilität der Grundzelle

- Frage: welche Bedingung muss erfüllt sein, damit das Produkt der Matrizen **H** und **V** sowohl die radiale als auch die vertikale Fokussierung erfüllt.
- Sowohl horizontale als auch vertikale Gesamtmatrix muss sich als Fokussiermatrix darstellen lassen.
- formal:

$$H = \begin{pmatrix} \cos \mu_H & \frac{1}{K_H} \sin \mu_H \\ -K_H \sin \mu_H & \cos \mu_H \end{pmatrix}$$

$$\cos \mu_H = \cosh(\omega s_1) \cos(\omega s_0)$$

- Der gleiche Ausdruck gilt auch für **V** mit

$$\cos \mu_V = \cos(\omega s_1) \cosh(\omega s_0)$$



- Die Parameter K_H und K_V sind komplizierte Kombinationen aus hyperbolischen und trigonometrischen Funktionen.

- Diese Darstellung ist nur möglich, wenn

$$-1 < \cos \mu_H < 1$$

$$-1 < \cos \mu_V < 1$$

- Das sind die Bedingungen für Stabilität.
- Synchrotrondesign mit Simulationsprogrammen
 - Optimierung der Geometrie und Quadrupolgradienten bis Stabilität erreicht wird.



Symmetrische Grundzelle mit unterschiedlichen Gradienten

- Eine andere Möglichkeit ist unterschiedliche ω (z.B. ω_0 und ω_1) in unterschiedlichen Sektoren zu betrachten:
- Dann ergibt sich

$$\cos \mu_H = \cosh(\omega_1 s_1) \cos(\omega_0 s_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1} \right) \sin(\omega_0 s_0) \sinh(\omega_1 s_1)$$

$$\cos \mu_V = \cos(\omega_1 s_1) \cosh(\omega_0 s_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega_0} \right) \sinh(\omega_0 s_0) \sin(\omega_1 s_1)$$

- **Stabilitätskriterien** sind weiterhin gültig.



- μ_H und μ_V sind die Phasenveränderungen in einer Grundzelle. Wenn der Beschleuniger N Grundzellen hat, wird die Änderung der Phase pro Umlauf $N\mu$ sein

- Anzahl der **Schwingungen pro Umlauf:**

$$Q = \frac{N\mu}{2\pi}$$

- Betatronresonanzen treten auf für:

$$nQ_h + mQ_v = p \quad \text{mit } n, m, p = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Wobei $(n+m)$ die „Ordnung“ der Resonanz ist.

- Bsp: ungekoppelte horizontale Resonanz 3. Ordnung:
 $Q_h = \text{Integer}/3$

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_3 = \begin{pmatrix} \cos\mu_H & \frac{1}{K_H} \sin\mu_H \\ -K_H \sin\mu_H & \cos\mu_H \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_3$$



Betatronresonanzen

- Bei ungekoppelten Resonanzen n -ter Ordnung kommt das Teilchen nach n Umläufen wieder an ursprüngliche Position mit gleichem Winkel zurück.
 - Kleinste Magnetfehler werden dadurch systematisch aufaddiert.
 - Schwingungsamplitude vergrößert sich bis das Teilchen verloren geht.
- Bei gekoppelten Resonanzen kann Schwingungsenergie übertragen werden.
- Vermeidung von Resonanzen ist essentiell für stabilen Betrieb
 - Hauptparameter sind Quadrupolmagnete \rightarrow direkter Einfluss auf Anzahl der Betatronschwingungen pro Umlauf
 - Korrekturmagnete um eventuelle (resonanztreibende) Fehler der Hauptmagnete auszugleichen.



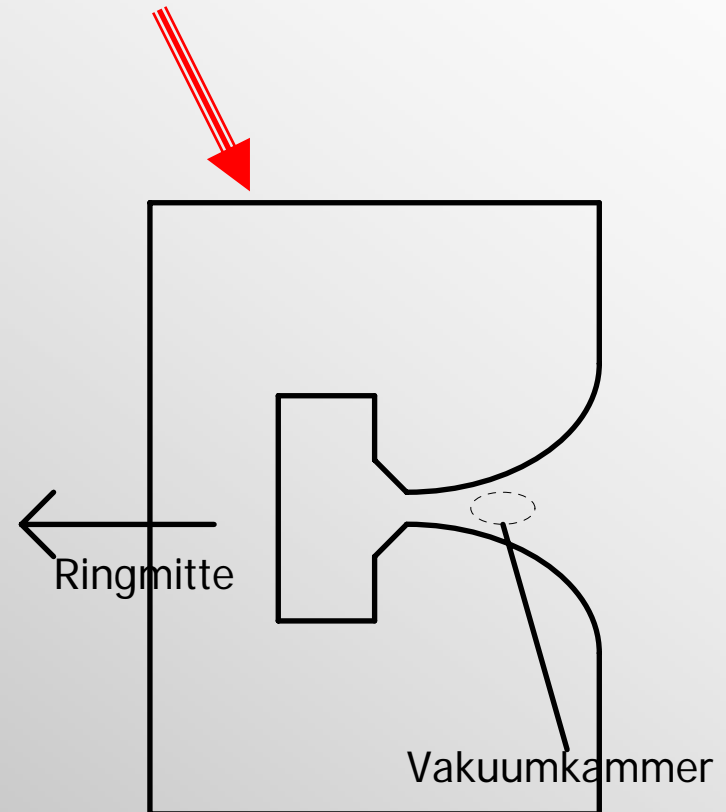
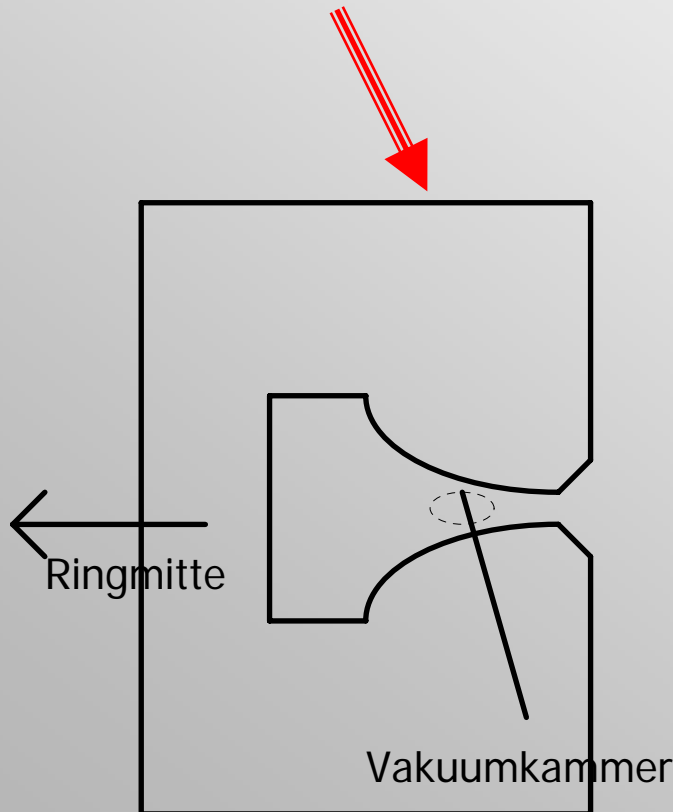
11.3 Ausführungen und spezifische Anwendungen von Maschinen mit dem AG-Prinzip (Synchrotron, Zyklotron)

- 1950 N. C. Christophilos Ideen über ein neues Fokussierungssystem für Elektronen und Ionen
 - 1952 Courant, Livingston und Snyder in Brookhaven
- Die alternating gradient Fokussierung besteht darin, dass die Ringmagnete des **Synchrotrons** so beschaffen sind, dass das **Magnetfeld des ersten Magneten radial nach außen abfällt** und damit auf den Teilchenstrahl **vertikal fokussierend** wirkt, während es **radial defokussiert**
 - Beim nächsten Magnet nimmt das Feld nach außen zu, wodurch **vertikal defokussiert** und **radial eine Fokussierung** erzielt wird



Polschuhprofil von AG-Magneten

links radiale und rechts vertikale Fokussierung





- Insgesamt → **starke fokussierende Wirkung**
- In Folge der starken rücktreibenden Kräfte ist die Frequenz der so genannten Betatron-Schwingungen mehrere Male größer als die Umlauffrequenz der Teilchen
- **Schwingungsamplituden sind kleiner als bei der schwachen Fokussierung in Synchrotronen mit konstantem Feldgradienten**



- Apertur^[1] um den Faktor 10 kleiner als bei den schwachfokussierenden Maschinen
- Geringere Vakuumkammerdimensionen
→ Magnete werden entsprechend kleiner
→ hohe Teilchenenergie bei tragbaren finanziellen Kosten
- ^[1] Apertur = minimaler Querschnitt der Vakuumkammer, den der Teilchenstrahl benötigt, um infolge seiner Schwingungen nicht auf die Kammerwände aufzutreffen



11.4 Phasenstabilität im AG–Synchrotron

- Longitudinale Stabilität und Bewegung eines Teilchens mit zu hoher/zu geringer Energie.
- Beschreibung mittels **Impulskompressionsfaktor** („**momentum compaction factor**“) genannt.
 - Änderung der Bahnlänge mit Impulsabweichung.
 - Wird von Magnetanordnung bestimmt

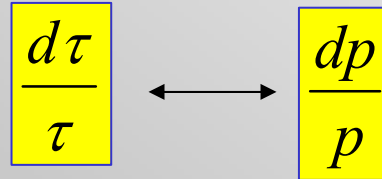
$$\alpha = \frac{dp/p}{dr/r}$$

$$\alpha \approx Q_{hor}^2$$

- Relevant für longitudinale Stabilität ist Änderung der Umlaufzeit:

$$\frac{d\tau}{\tau} = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \frac{dp}{p}$$

- Ultrarelativistisch (γ gross):
 - Immer **gleiches** Vorzeichen
- Niedrigenergetisch:
 - Eventuell **entgegengesetztes** Vorzeichen! (below transition)





Phasenstabilität existiert in den folgenden Fällen:

$$0 < \varphi_s < \frac{\pi}{2}$$

wenn $\alpha > \gamma^2$ höhere Energie => kürzere Umlaufzeit

$$\frac{\pi}{2} < \varphi_s < \pi$$

wenn $\alpha < \gamma^2$ höhere Energie => längere Umlaufzeit

- Sonderfall: wenn $\alpha = \gamma^2$ keine Phasenstabilität
→ meist mit Teilchenverlust verbunden!
- TRANSITIONSÜBERGANG im Synchrotron,
->Erfordert Phasensprung der RF &eventuell Q-Änderung
- kritische Energie (Transitionsenergie) E_{tr} :

$$E_{tr} = \gamma_{tr} E_0 \approx Q_{hor} E_0 \Leftrightarrow \gamma_{tr} \approx Q_{hor}$$



$$v < c$$

- Teilchen, die bei einem Beschleunigungsvorgang zu viel Energie aufgenommen haben, werden schneller umlaufen und beim nächsten Mal mit einer etwas früheren HF-Phase zusammentreffen, die einer geringeren Spannung entspricht.
- Das phasenstabile Gebiet liegt daher auf dem ansteigenden Teil der HF-Kurve.
- Diese Stabilisierung funktioniert nur, solange die Teilchen sich mit Geschwindigkeiten wesentlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit bewegen und der Impulszuwachs in Geschwindigkeitszuwachs geht.

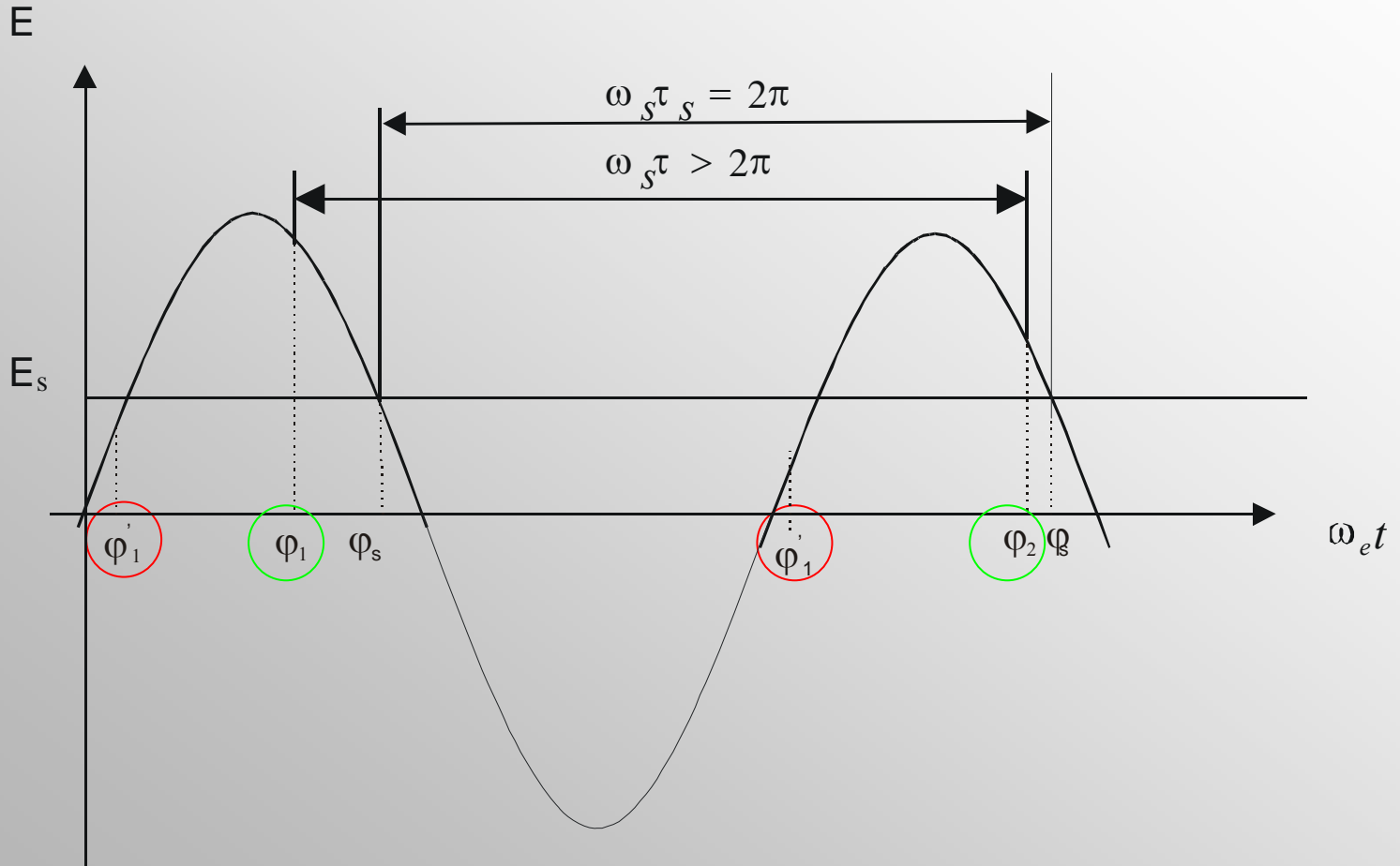


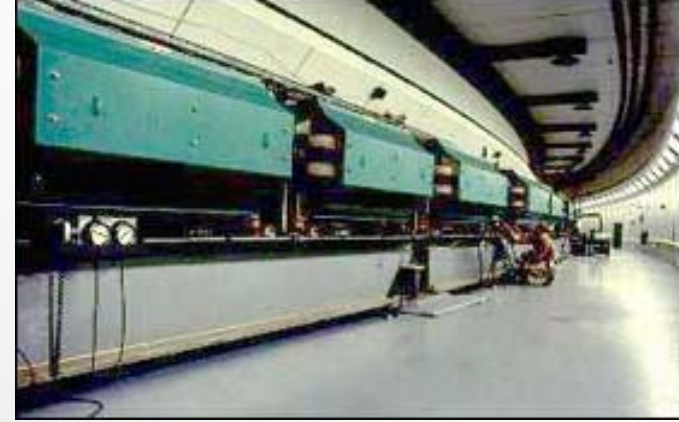
$v \rightarrow c$

- Wenn sie sich c nähern, sodass ihre Geschwindigkeit praktisch konstant bleibt, dann erfüllt diese Stabilisierungsart nicht mehr ihren Zweck und die Maschine arbeitet wie ein Elektronensynchrotron.
- Das phasenstabile Gebiet liegt jetzt auf dem abfallenden Teil der HF-Kurve.
- Die Stabilisierung wird dadurch erreicht, dass Teilchen mit etwas geringerer Energieaufnahme beim Beschleunigungsprozess einen kleineren Bahnradius annehmen und dadurch die Beschleunigungsstrecke früher erreichen.
- Sie treffen mit einer früheren Phasenlage zusammen, besitzen allerdings einen höheren Spannungsimpuls und damit auch eine höhere Energie.



Phasenstabilität oberhalb Transitionsenergie





- 240 magnets are successively alternated inward and outward, permitting particles to be propelled and focused in both the horizontal and vertical plane at the same time
- accelerating $2.5E13$ protons with every pulse, and heavy ions such as gold and iron
- AGS is used by 850 users from 180 institutions from around the world annually
- The AGS receives protons from Brookhaven's 200 MeV LINAC

